

DEMにおけるエネルギーの保存性を考慮した 法線方向の接触力の評価法

AN EVALUATION METHOD OF NORMAL CONTACT FORCE WITH ENERGY
CONSERVATION IN DISTINCT ELEMENT METHOD

藤岡 奨*・牛島 省**

Susumu FUJIOKA and Satoru USHIJIMA

*学生員 京都大学大学院 社会基盤工学専攻 修士課程 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

**正会員 工博 京都大学大学院助教授 社会基盤工学専攻 (同上)

This paper concerns the evaluation method for normal contact force in the Distinct Element Method (DEM) in terms of the energy conservation. The contact force in DEM is usually obtained from the relative displacement and velocity of the particles, using analogy of spring-dashpot system. In the usual evaluation, the kinetic energy of the system is not taken account for the contact force because the model of the contact force is a mere imitation of the spring-dashpot system. In this paper, an evaluation method for normal contact force, that conserves the kinetic energy is newly proposed. A basic validation is carried out to confirm the validity of the proposed model. It is shown that the proposed model evaluates the normal contact force properly compared to the existing models.

Key Words : Distinct Element Method, contact force, kinetic energy, phase space

1. はじめに

個別要素法¹⁾ (Distinct Element Method, DEM) は、個々の粒子の運動を直接追跡することによって粒子群としての挙動を解析することを目的として提案され、今日まで様々な分野でその有効性が示されている。最近では DEM は粒子間の相互作用を直接取り扱うことの出来る手法として比較的大きな粒子を含む固気液混相流の解析に採り入れられ^{2) 3)}、流体相の計算と組み合わせる現象の解析が行われている。このような現象においては、粒子の運動を群として扱う粉体や粒状体などの現象とは異なり、粒子の個々の運動が詳細に検討される。

本論文では、粒子の個々の運動について詳細に検討する場面を想定して、接触力の評価法について検討する。DEMにおける接触力の評価法は、粒子と粒子の重なりを許容するモデルと許容しないモデルがあるが、本論文では前者のモデルを扱う。前者のモデルでは、粒子同士の接触深さを仮想バネの変形量に見立て、バネダッシュポット系のアナロジーを用いて力を求める。しかし、このような評価法では系全体のエネルギー保存が考慮されていないため、個々の粒子の運動を詳細に検討する場合には反発係数が一定にならないなどの不

都合が生じる。系のエネルギー保存を考慮した接触力のモデルとして藤岡・牛島は、バネダッシュポット系のアナロジーをエネルギーに対して用いるモデルを提案し、その有効性を示した⁴⁾。

エネルギーの保存性を考慮した藤岡・牛島⁴⁾のモデルは、接触力評価の際に場合分けが5通りもあり、限られた反発係数の範囲にしか適用できないという制約もあった。本論文ではこのモデルを改良し、場合分けを3通りに減らし、任意の反発係数に対して適用できるようにした。

2. 変数の無次元化

接触力は接触深さと相対速度から求められるが、これらの変数を以下のように無次元化する。法線ベクトルを \mathbf{n}_{BA} 、球 A、球 B の速度を $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ とし、それぞれの球の無次元化された法線方向の速度成分を p, q とする。また、接触深さを d_r とし、無次元化された接触深さを d とする。各無次元数 p, q, d は次式で与えられる。

$$p = (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{n}_{BA}) \delta_t / d_c \quad (1)$$

$$q = -(\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}_{BA}) \delta_t / d_c \quad (2)$$

$$d = d_r / d_c \quad (3)$$

ただし, δ_t は時間刻み, d_c は代表長さである.

3. 相空間

前節で定義される p, q, d を基本変数とする相空間を考える. 相空間内では, 基本変数 p, q, d を用いて運動エネルギーおよび仮想バネに蓄えられるポテンシャルエネルギーを以下のように表すことが出来る.

次式に示される K_X^* は球 X の法線方向の無次元運動エネルギーである.

$$K_X^* = \frac{1}{2} m_X^* u_X^2 \quad (4)$$

m_X^* は換算質量 m_r によって無次元化された球 X の質量, $u_A = p, u_B = q$ である. 系全体の法線方向の無次元運動エネルギーは次式で表される.

$$K^* = \frac{1}{2} (m_A^* p^2 + m_B^* q^2) \quad (5)$$

一方, 接触深さ d によって定義される仮想バネに蓄えられる無次元ポテンシャルエネルギーは次式で表される.

$$P^* = \begin{cases} \frac{1}{2} a d^2 & (d > 0) \\ 0 & (d \leq 0) \end{cases} \quad (6)$$

a は無次元パラメーターで, k をバネ定数とすると, $k\delta_t^2/m_r$ で表される. 式 (5),(6) により系全体の無次元力学的エネルギーは次式で表される.

$$E^* = \begin{cases} \frac{1}{2} (m_A^* p^2 + m_B^* q^2 + a d^2) & (d_r > 0) \\ \frac{1}{2} (m_A^* p^2 + m_B^* q^2) & (d_r \leq 0) \end{cases} \quad (7)$$

相空間内で力学的エネルギーが一定の曲面は式 (7) で表される. この曲面を等エネルギー面 S_c と呼ぶ. また, Newton の第三法則は次式で表現される.

$$f_j^* = m_A^* (p_{j+1} - p_j) = m_B^* (q_{j+1} - q_j) \quad (8)$$

f_j^* は, j ステップ目に球 A, B の間に働く無次元の接触力である. 式 (8) は, $j+1$ ステップにおける p, q が次式で示される平面 S_{3rdLaw} 内にあることを示す.

$$S_{3rdLaw}(p, q, d) = m_A^* (p - p_j) - m_B^* (q - q_j) = 0 \quad (9)$$

また, 速度と変位の関係より $j+1$ ステップにおける p, q は次式で示される未来面 S_f 内にある.

$$S_f(p, q, d) = p + q + d_j - d = 0 \quad (10)$$

これらの 3 曲面, 等エネルギー面 S_c , 未来面 S_f , S_{3rdLaw} , によって状態点の動きが制限される. 系の全エネルギーが知られていれば, 次ステップの状態点の位置は, これらの 3 曲面の交点として求められる. 図 1 には, 相空間内の等エネルギー面 S_c , S_{3rdLaw} , 未来面 S_f . 三曲面の交点が★印で示されている.

4. 接触力の評価法の導出

接触力の評価法の導出の概要を以下に示す.

$j-1$ ステップにおいて粒子が接触しておらず, j ステップにおいて接触しているとする. このときの j ステップを接触ステップと呼ぶ. 本モデルでは, 接触ステップにおける接触力は, 次ステップ目において系の全エネルギーが理論的な球の衝突後の全エネルギーと一致するように決定する. エネルギーの減少量は, 反発係数 e を用いて決定される.

接触ステップより後では, ステップの前後で力学的エネルギーが変化しないように接触力を決定する. このように, エネルギーの損失を接触ステップのみで扱うことによってエネルギーの保存を精度良く満たすことができる. このようなエネルギーの取り扱いが物理的な背景に欠けるが, 本モデルは数値的な安定性と系のエネルギーを精度よく取り扱うことを目的としている.

接触深さと 1 ステップ当たりの球の移動量の比を表す無次元パラメーター, 状態点の傾き s を次式で定義する.

$$s_j \equiv \frac{p_j + q_j}{d_j} \quad (11)$$

以下では, 接触から時系列に沿って接触力を求める手順を詳しく解説する. 二球体の接触の有無は接触深さ d の符号によって判断する.

接触ステップでは, $s_j \geq 1$ である. この時, $d_{j-1} \leq 0$ であることが次式で確認できる.

$$\frac{d_{j-1}}{d_j} = 1 - s_j \quad (12)$$

計算上は接触ステップより一つ前のステップから接触ステップまでの時間帯はそれぞれの球体は等速運動するので, 二球体が接触した厳密な時刻は接触ステップの時刻よりも δ_t/s_j だけ過去の時刻である. この時刻を真の接触時刻と呼ぶ. また, 接触ステップにおける時刻を見かけの接触時刻と呼ぶ.

真の接触時刻から, 見かけの接触時刻までの間, 球体は接触を全く考慮せずに並進していることになる. このため, 接触ステップにおける球体の位置の情報は破棄する. この点が, 藤岡・牛島のモデルと考え方が異なる点である. 藤岡・牛島のモデルでは, 接触ステップの情報を採用して計算を進めている.

接触前のステップでの系のエネルギーと接触ステップでのエネルギーの関係は次式で表される. ただし, $\hat{p}_j, \hat{q}_j, \hat{d}_j$ は元の接触ステップの量ではなく, 修正された接触ステップの量である.

$$\hat{E}_j^* = E_{j-1}^* - \Delta E^* = \frac{1}{2} (a \hat{d}_j^2 + m_A^* \hat{p}_j^2 + m_B^* \hat{q}_j^2) \quad (13)$$

ΔE^* は、衝突による系のエネルギーの減少量であり、反発係数 e を用いて式 (14) のように表される。

$$\Delta E^* = \frac{1}{2}(1 - e^2)(p_j + q_j)^2 \quad (14)$$

ここでは、 p_j, q_j は修正する前の量である。

修正後の接触深さ \hat{d}_j は、真の接触時刻から見かけの接触時刻までの δ_t/s_j の間に粒子が並進した距離となるので、次式で表される。

$$\hat{d}_j = \frac{\hat{p}_j + \hat{q}_j}{s_j} \quad (15)$$

真の接触時間から見かけの接触時間間に接触力 \hat{f}^* が働くものと考え、Newton の第三法則により、次式が得られる。

$$\frac{f_{j-1}^*}{s_j} = \hat{f}^* = m_A^*(\hat{p}_j - p_j) = m_B^*(\hat{q}_j - q_j) \quad (16)$$

式 (13), 式 (15) および式 (16) を解くと、次式が得られる。

$$\hat{f}^* = \left(\frac{s_j e}{\sqrt{s_j^2 + a}} - 1 \right) (p_j + q_j) \quad (17)$$

式 (16), 式 (15) より修正後の量 \hat{p}_j, \hat{q}_j および \hat{d}_j が求められる。

このような修正を施した後、接触ステップから次ステップまでの間に働く力 \bar{f}^* を求める。接触ステップの修正の時点で衝突によるエネルギー損失は考慮されているので、今度はエネルギー保存を考慮する。エネルギー保存と Newton の第三法則および、変位と速度の関係式により、次式が得られる。

$$K_j^* = \frac{1}{2}(a(\hat{d}_j + p_{j+1} + q_{j+1})^2 + m_A^* p_{j+1}^2 + m_B^* q_{j+1}^2) \quad (18)$$

$$\bar{f}_j^* = m_A^*(p_{j+1} - \hat{p}_j) = m_B^*(q_{j+1} - \hat{q}_j) \quad (19)$$

式 (18), (19) を解くことにより、 \bar{f}_j^* は次式で得られる。

$$\bar{f}_j^* = -\frac{d_j}{1+a} \left\{ (a+1)s_j + a - \sqrt{s_j^2(a+1) + a^2} \right\} \quad (20)$$

\bar{f}_j^* は二次方程式の一方の解である。もう一方の解を採用すると、以下に示すような不自然な結果が導びかれるので採用しない。

二個の球体と同じ壁に衝突する場合を考える。図 2 に示されるように、あるステップにおいて一方の球の状態点が P にあり、もう一方の球の状態点が Q にあったとする。球 P, 球 Q には次ステップの状態点の候補がそれぞれ二点 (U, V および S, T) ある。負の側 (V, T)

を選んだ場合、状態点が Q にある球体よりも先に壁面に接触したと判断できる状態点が P にある球体の状態点は V に移ると考えられる。状態点 V 上では球体は壁面と接触している。一方で、状態点 Q は T に移り、次ステップで球体が壁面から離れる状態となる。

後から壁面に接触した球体の方が先に壁面に接触した球体よりも先に壁面から跳ね返るという状態は不自然である。このような例が起こる頻度は少ないかも知れないが、なるべく起こらない方が良いので、正の側の解を採用する。

まとめると、 $s_j \geq 1$ のときは、そのステップが接触ステップであると判断され、接触ステップにおける正しい量を得るために接触力 \hat{f}_j^* が求められる。修正された接触ステップの量から次ステップ目の量を得るために、接触力 \bar{f}^* が求められる。相空間内で $s_j \geq 1$ である領域をモード 1 の領域と呼ぶことにする。

次に接触ステップ以降について考える。接触ステップの次のステップでは、状態点の傾き s_j は常に $0 < s_j < 1$ を満たす。このことは幾何学的に明白である。相空間において $0 < s_j < 1$ を満たす領域をモード 2 の領域と呼ぶことにする。この場合でも次ステップの状態点の候補は、二次元方程式の二つの解となる。ここでは、解として負の側の解を用いる。正の側の解を用い続けると状態点の位置が一点に収束してしまい、永遠に球体が壁面から離れないという状態になるという不具合が生じる。

負の側の解を用いた接触力は式 (21) で与えられる。

$$f_j^* = -\frac{d_j}{1+a} \left\{ (a+1)s_j + a + \sqrt{s_j^2(a+1) + a^2} \right\} \quad (21)$$

式 (21) で与えられる接触力を作用させると、状態点の傾き s_j は負となる。

次に $s_j < 0$ となった場合について考える。 $s_j < 0$ の時、次ステップで球体同士が接触しているか否かによって、場合分けを行う。次ステップの接触深さの符号は次式で判断できる。

$$\frac{d_{j+1}}{d_j} = 1 + s_j + \frac{f_j^*}{d_j} \quad (22)$$

$-\sqrt{1-a} \leq s_j \leq 0$ のとき、 d_{j+1} の符号は正となる。次ステップで接触深さが正となる場合、 f_j^* は式 (21) で与えられる。相空間内で $-\sqrt{1-a} \leq s_j \leq 0$ を満たす領域が存在すれば、その領域をモード 3 の領域と呼ぶ。 $a > 1$ または $s_j < -\sqrt{1-a}$ の場合、 d_{j+1} の符号は常に負となる。この場合は接触深さに応じてポテンシャルエネルギーを考慮する必要がないので、 f_j^* は次式で与えられる。

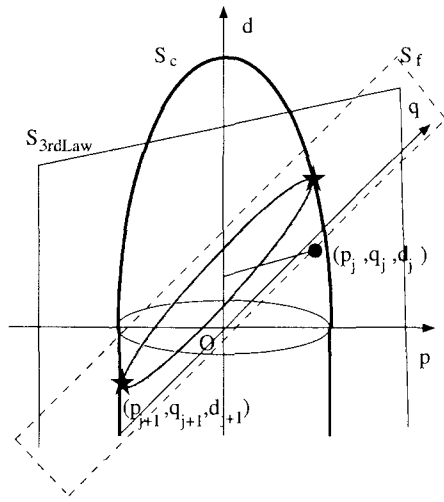


図-1 相空間内での各面の幾何学的関係.

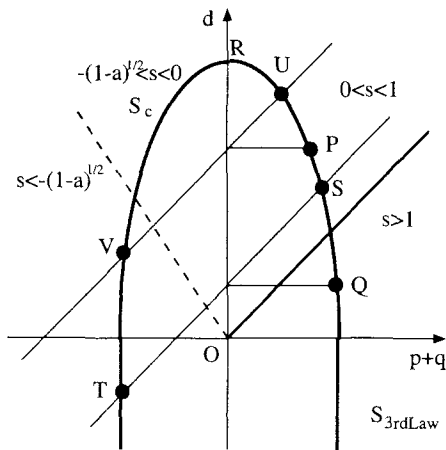


図-2 2通りの次ステップにおける状態点の候補

$$f_j^* = -d_j (s_j + \sqrt{s_j^2 + a}) \quad (23)$$

$0 < a \leq 1$ のときは $s_j < -\sqrt{1-a}$, $a > 1$ のときは $s_j < 0$ を満たす領域をモード4の領域と呼ぶことにする. 図3に本モデルによる接触力の評価のアルゴリズムを示す.

5. 検証計算

5.1 計算条件と比較に用いた既存モデル

本モデルの有効性を確認するために計算精度および接触力モデルの複雑化に伴う計算時間の増加量について, 既存のモデルによる計算結果との比較を通して検証を行った. 既存のモデルは, 線形モデルの代表としては Cundall のモデル¹⁾を用いた. ただし, Cundall のモデルにおいてパラメータの設定方法は川口ら⁵⁾, を参照した. 更に田中らの非線形モデル⁶⁾, 藤岡・牛

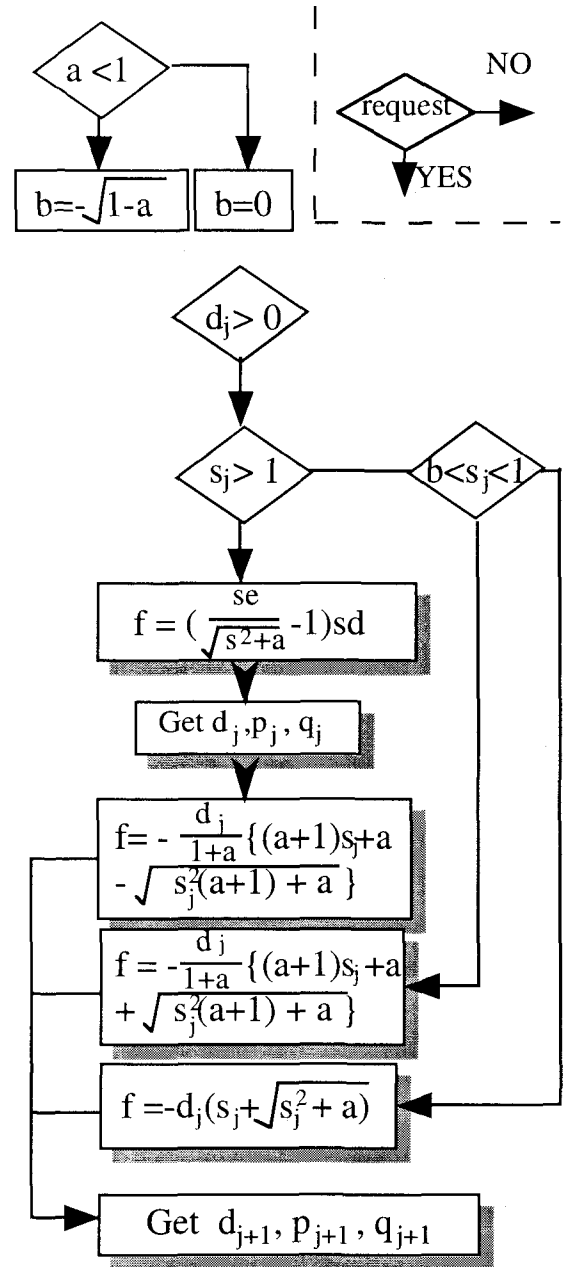


図-3 接触力を評価するまでのフローチャート

島のエネルギー保存モデル⁴⁾を用いて同様の計算を行い比較検討した. 以下では簡単にそれぞれのモデルをモデルC, モデルT, モデルFと呼ぶものとする.

以下の検証計算では, 反発係数は0.7, 重力加速度は $9.8[\text{m/s}^2]$, 粒子の直径は $225[\text{m}]$, 時間刻みは $1.0 \times 10^{-3}[\text{s}]$, 粒子の密度は $1.0[\text{kg/m}^3]$, そして, 系の代表長さを粒子の直径にとる.

5.2 壁面への遅い衝突の計算

最初の検証計算では, 球体は自身の直径 d_A の0.01倍の高さから自由落下する. 球体が壁面から跳ね返る度に球体の力学的エネルギーは理論的には0.49倍になる.

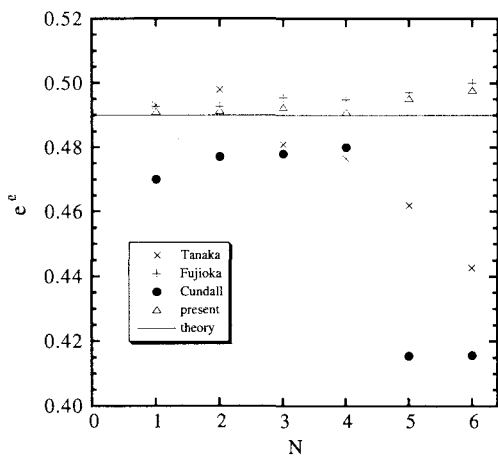


図-4 低速度の接触の場合の接触前後のエネルギー比の比較

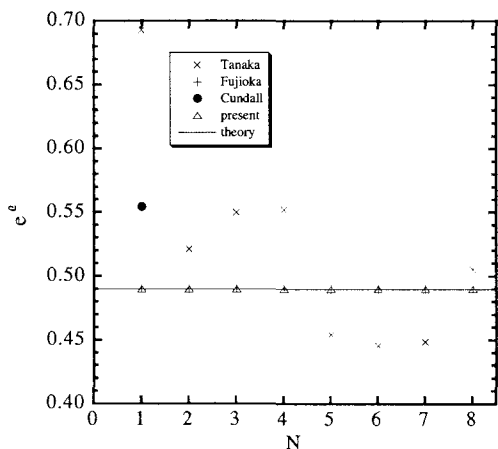


図-5 高速度の接触の場合の接触前後のエネルギー比の比較

図4には計算開始からのN回目の衝突前後の力学的エネルギーを比較することによって得られた力学的エネルギーの比 e^2 がプロットされている。図4に示されるようにモデルFおよび本モデルによって得られる力学的エネルギー比 e^2 がモデルCおよびモデルTに比べて、理論値である0.49の周辺の狭い範囲に分布している。

衝突回数が増え、低速度の接触となった場合には、本モデルはモデルFよりも精度良い計算結果を与える結果となっている。この差は、接触ステップにおいて接触深さを計算し直すことによって生じたものと考えられる。このケースは、低速度の接触の代表として行った。非常に低速度で接触する場合でも本モデルは精度良く接触を扱うことが確認できた。

5.3 壁面への速い衝突の計算

次に、高速度の接触について検証する。計算開始時における球体は $0.01d_A$ の高さに設置されている。1ス

テップの移動で球体が壁面を貫通しない限度で大きな初期速度 1.0×10^5 [m/s] 壁面に対して垂直方向に与える。1ステップで球体が壁面を貫通しない限度は、相空間内部で $p+q$ が0.5を越えないことである。図5は、高速度の衝突の場合における図4に対応する図である。モデルCでは、2回目の衝突で壁面をすり抜けてしまうので、1回目の衝突のデータのみが示されている。モデルTは1回目の衝突以降も計算を続行することが出来たが、エネルギーの減衰率 e^2 の値は一定とはなっていない。モデルFおよび本モデルは理論値に近いエネルギー比 e^2 を与えている。

図6には、接触状態における状態点の動きが示される。図6によれば、モデルCを用いると、接触の途中で d が1を越え、球体が完全に壁面に埋まってしまう。モデルT、モデルFおよび本モデルによる状態点の動きの詳細については、図7に示される。図中の $s=1, s=0, s=-\sqrt{1-a}$ の直線が相空間をそれぞれのモード領域に分割している。図中には複数回の接触における状態点の動きが重ねて示されている。お互いに直線で結ばれている点同士が、同じ接触で得られた状態点である。接触時の最初の状態点は必ずモード1の領域にある。本モデルでは、状態点はモード1の領域からモード2の領域へと移動し、さらにモード4の領域へと移動している。モード4の領域は、状態点が通過する最後の領域である。モデルFはモード1の領域を2領域に分割する直線 $s=1/e$ が存在した。モデルFでは、直線 $s=1/e$ より下部の領域では1ステップで球体が跳ね返ると考えるので、状態点は孤立している。モデルFでは、接触時のモードによって接触状態にあるステップ数が異なる。その他のモデルでは、この計算のケースに限れば接触状態にあるステップ数が大きく異なっていない。接触力の形自体に物理的な背景のない本モデルによって得られる状態点の動きは、接触力の形に物理的な背景の存在するモデルTおよびモデルCによって得られる状態点の動きと似ていることが見て取れる。

以上のように極端に低速度の衝突および高速度の衝突の場合について検証計算を行ったが、いずれの場合も精度の面で本モデルの有効性が示された。

5.4 接触力の評価時間に関する検証

本モデルは接触力評価時に場合分けが必要であり、また既往の簡易なモデルに比べて複雑な形をしており、接触力評価の計算量が増加するものと考えられる。そこで、今度は本モデルを用いた場合の計算時間の増加量を調べた。

計算対象とする球体は16個で、 4×4 の正方形に配

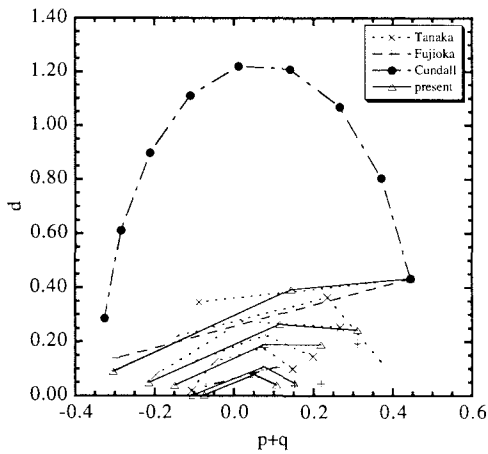


図-6 高速度での衝突の場合の相空間内の状態点の動きの比較。

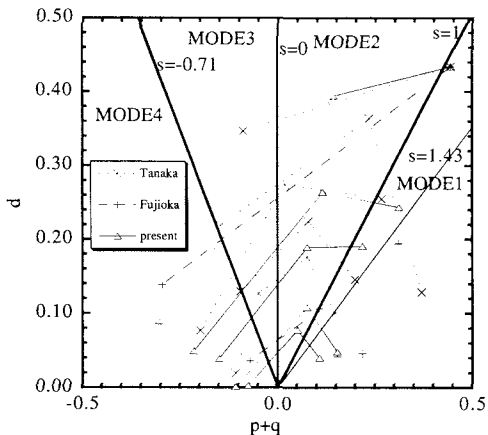


図-7 各モデルによる状態点の動きの詳細の比較。

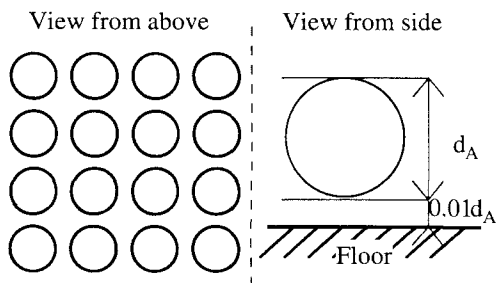


図-8 計算対象とする球体の配置図 (上面図と側面図)

置する。球体は自身の直径の0.01倍の高さから落下する。図8に詳細を示す。時間刻みを 1.0×10^{-5} とし、 5.0×10^6 ステップまで計算した場合の計算時間の比較である。

表1に接触力のモデル別にトータルの計算時間を示す。表中のpは本モデルによる結果であることを示す。モデルCを用いた場合が一番計算時間が多くなっており、モデルFを用いた場合が一番計算時間が少なくなっている。さらに表1に粒子の壁面との延べ接触回数を

表-1 接触力評価に要する計算時間の比較

Case	全計算時間 (s)	接触力全評価時間 (s)	接触回数	1回の接触当りの接触力評価 (s)
T	341	24	1.26×10^7	1.91×10^{-6}
F	269	11	5.62×10^6	1.95×10^{-6}
C	423	35	1.87×10^7	1.88×10^{-6}
p	306	21	1.07×10^7	1.96×10^{-6}

示す。ここで、延べ接触回数とは各ケースにおいて接触力の評価が行われた全回数のことである。延べ接触回数の多いケースほど計算時間が長くなっている結果となった。藤岡・牛島のモデルは、接触によっては1ステップで接触が終了する場合があります、他のモデルに比べて、延べの接触回数が少ない結果となっている。

また、全計算時間のうち、接触力の評価にかかる時間を調べた。接触が判定されてから接触深さや相対速度を求めるまでの計算時間は含まれず、与えられた接触深さおよび相対速度から接触力を求める為に要する計算時間を測った。

表1に示されるように、接触力評価に直接かかる時間は全体の計算時間の6-8%程度であった。接触力評価に要する全ての計算時間を延べ接触回数で除して、1回の接触当りの接触力評価に要する計算時間を求めると、複雑なモデルほど1接触当りの接触力の評価に要する計算時間が多くなる傾向が認められた。しかしながら、複雑な本モデルと一番簡潔であるモデルCの計算時間の差は4%程度にとどまっている。また、本モデルはモデルFに比べてアルゴリズム上は簡潔であるが、計算時間に有意な差は認められなかった。

まとめると、接触力評価に本論文で提案された複雑なモデルを用いる場合、接触力評価の複雑化に伴う計算時間の増加量は4%程度にとどまり、逆に接触力評価の延べ回数が減少することにより、全計算時間は短くなると考えられる。

5.5 粒子の接触時間に関する検証

次に粒子の接触時間について検討した。それぞれのモデルについて接触の開始から接触終了までに必要なステップ数を時間刻みを変化させながら調べた。

表2に示されるようにモデルT以外のモデルでは、接触開始から接触終了までのステップ数は時間刻みによらず、ほぼ一定である。モデルTは、接触の取り扱いに要するステップ数が時間刻みに影響されている。

特にモデルFは接触開始から終了までに要するステップ数が少ない。粒子の接触時間の長さが、粒子の運動

表-2 各モデルによる接触力時間の比較

Case	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-5}
T	14	23	37
F	2	1	1
C	9	10	10
p	3	3	3

に影響を及ぼすことが長田ら⁷⁾によって指摘されており、粒子の接触時間を基準として時間刻みを設定する場面もあると考えられる。このような場面では、粒子の接触の取り扱いに要するステップ数が少ないモデル F 及び本モデルが時間刻みを比較的大きくとれるという点で有効ではないかと考えられる。

5.6 接触が持続する運動に関する計算

本モデルは、二球体が接触する場合に基づいて接触力を導いているので、複数の球体との接触が持続する場合には、必ずしも理論解を与えない。一つの球体に複数の球体が接触している場合、それぞれの球体との接触力評価に他の球体の存在は考慮されないため、誤差が生じることが予想される。

本節では、複数の球同士の接触が持続する運動として積み上げた球の上を球が滑り落ちる運動に対して数値計算を行い、精度を比較した。

図9の上段に示されるように計算の初期状態では、半径 r_0 の球 A, B が隣接して二個並べられておりその上に三個目の半径 r_0 の球 C が乗っている。本計算では、 $r_0 = 2[\text{cm}]$ 、重力加速度は先程の計算例と同じ値を用いた。計算開始とともに球 C が球 A, B を両側に押し出しながら滑り落ちる。図9の下段に示されるように、 $t = T_0$ の時刻になると球 A, B と球 C は離れる。 $t = T_0$ 以降は、球 C は自由落下運動、球 A, B は等速直線運動を行う。計算の精度検証には、計算開始から球 A, B が等速直線運動に移行するまでの時間 T_0 および等速直線運動移行後の球 B の速度を比較することによって行うものとした。ただし、球および床の間に働く力は垂直応力のみを考え、摩擦は考えないものとする。

球 B の水平方向の速度を \dot{d} 、球 C の鉛直方向の速度を \dot{h} とする。力学的エネルギーの保存則は次式で表現される。

$$\frac{1}{2}\dot{h}^2 + \dot{d}^2 + gh = \sqrt{3}gr_0 \quad (24)$$

球 A, B と球 C が接触している間は以下の関係がある。

$$h^2 + d^2 = 4r_0^2 \quad (25)$$

$$h\dot{h} + d\dot{d} = 0 \quad (26)$$

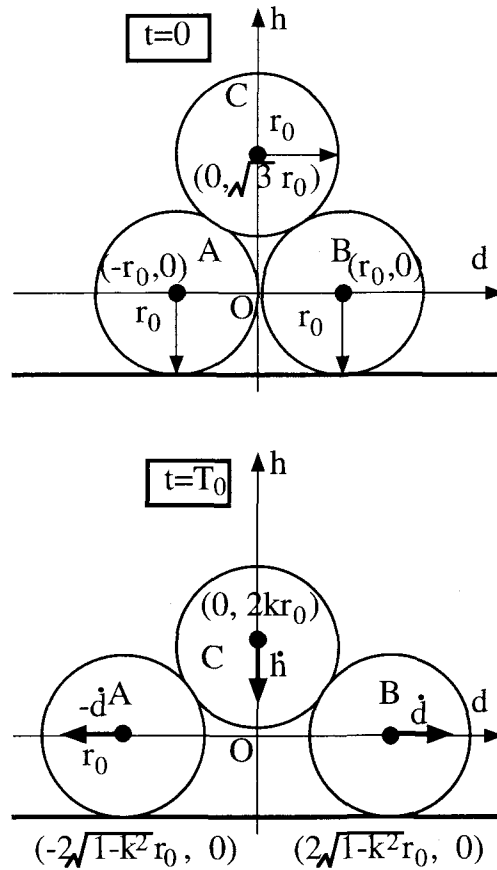


図-9 積み上げた球体の初期状態および接触終了時の球体の状態。

この関係を用いると、 \dot{h} は次式で得られる。

$$\dot{h} = -\sqrt{\frac{2g(\sqrt{3}r_0 - h)(4r_0^2 - h^2)}{4r_0^2 + h^2}} \quad (27)$$

が得られる。球 B の最終的な無次元速度 d' は次式で与えられる。

$$d' = \frac{\dot{d}}{\sqrt{4gr_0}} = \sqrt{\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2} - k)k^2}{1 + k^2}} \quad (28)$$

ただし、 k は次式で示される。

$$k = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}} \quad (29)$$

また、 T_0 は次式で表される。

$$T_0 = \sqrt{\frac{r_0}{g}} \int_k^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{1 + t^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2} - t)(1 - t^2)}} dt \quad (30)$$

理論解の積分計算は、次式で行い、 $N = 1 \times 10^8$ とした。

$$\begin{aligned} & \int_k^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{1 + t^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2} - t)(1 - t^2)}} dt \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \Delta \sqrt{\frac{1 + (k + j\Delta)^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2} - k - j\Delta)(1 - (k + j\Delta)^2)}} \quad (31) \end{aligned}$$

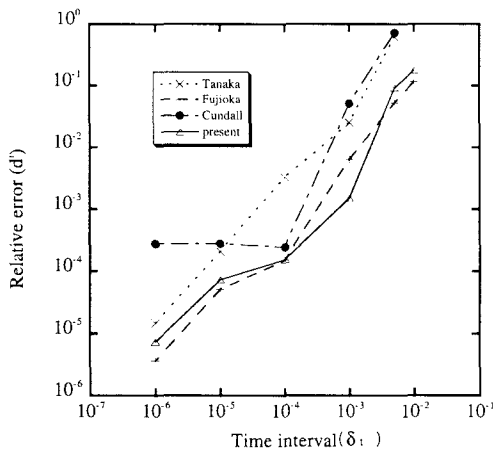


図-10 時間刻みと d' の相対誤差の関係.

ただし、 $\Delta = (\sqrt{3} - k)/N$ である。

それぞれのモデルを用いて d' , T_0 を求め、時間刻み δ_t と理論解との相対誤差を比較した。

まず、図 10 に、 d' の計算結果を示す。横軸に時間刻み、縦軸に相対誤差が示されている。モデル T は、時間刻みを細かく設定することによって精度を向上させることが出来るが、モデル F および本モデルと比較すると同じ精度を得るために相対的に細かい時間刻みを用いることが必要となる。モデル C は、 1.0×10^{-4} 程度より細かい時間刻みを用いても、精度の向上は認められなかった。時間刻みが 1.0×10^{-4} 程度よりも大きくなると、誤差は急激に増大する。モデル F は本モデルよりも精度のよい解を与える場合が多くなっている。

次に、図 11 に、 T_0 の計算結果を示す。各計算において、 T_0 として球 B と球 C が離れたと判定されたステップにおける時刻を採用した。

モデル T は、 d' の時と同様に時間刻みを細かく設定することによって精度が向上するが、同じ精度を得るために必要な時間刻みはモデル F および本モデルよりも細かくなっている。モデル C は、 1.0×10^{-4} 程度よりも細かい時間刻みを用いても精度はあまり上がらない結果となった。モデル F と本モデルを比較すると、 d' の比較の時と同様にモデル F の方が精度の良い解を与える場合が多くなっている。

以上の計算結果を踏まえると、系のエネルギー保存を考慮したモデルは、二球体の接触過程を基にして構築されているにも関わらず、複数の球体の接触が持続する運動に対して既往のモデルよりも精度の良い解を与えていることが示された。

6. おわりに

本論文は系の力学的エネルギー保存を考慮した、垂直方向の接触力を評価するモデルについて考察した。

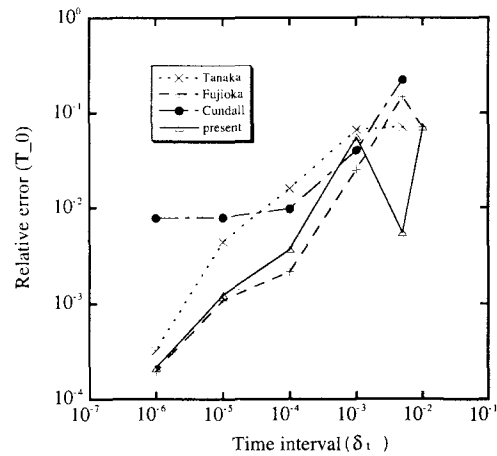


図-11 時間刻みと T_0 の相対誤差の関係.

接触力の形自体に物理的な背景はないが、相空間内での状態点の動きは接触力の形に物理的背景のあるモデルと同様のものが得られた。接触力の形が複雑となっても、接触中の計算ステップ数が少なく済むので、全体としては計算時間は短くなることが示された。また、球体の上を滑り落ちる球体の数値計算を行い、本論文で提案されたモデルが既往のモデルに比べて精度良く剛体の運動を予測できることを示した。

参考文献

- 1) P.A.Cundall and O.D.L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 47-65, 1979.
- 2) 牛島省, 竹村雅樹, 山田修三, 福津家久. 非圧縮性流体解析に基づく粒子 - 流体混合系の計算法 (MICS) の提案. 土木学会論文集, No. 740/II-64, pp. 121-130, 2003.
- 3) 牛島省, 田中伸和, 米山望. 3次元複雑形状領域内における固気混相流中の固体粒子のラグランジュ的解析法. 水工学論文集, 第 43 巻, pp. 515-520, 1999.
- 4) 藤岡奨, 牛島省. エネルギーの保存性を考慮した DEM における接触力の評価法. 水工学論文集, 第 49 巻, pp. 751-756, 2005.
- 5) 川口寿裕, 田中敏嗣, 辻裕. 離散要素法による流動層の数値シミュレーション (噴流層の場合). 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 58, No. 551, pp. 2119-2125, 1992.
- 6) 田中敏嗣, 石田俊哉, 辻裕. 水平管内粒状プラグ流の直接数値シミュレーション (付着力がない場合). 日本機械学会論文集 (B 編), Vol. 57, No. 534, pp. 456-463, 1991.
- 7) 長田健吾, 清水義彦, 岩井明彦. 個別要素法を用いた流砂解析における問題点に関する考察. 応用力学論文集, Vol. 7, pp. 1033-1041, 8 2004.

(2005 年 4 月 15 日 受付)