

【特集】注目研究 in CFD28

密度流の数値計算におけるブシネスク近似の考察

京都大学大学院 工学研究科 池田 俊一
 *京都大学 学術情報メディアセンター 牛島 省†
 京都大学大学院 工学研究科 鳥生 大祐
 京都大学大学院 工学研究科 青木 一真

Numerical studies on Boussinesq approximations for density currents

Shunichi Ikeda, Graduate School of Engineering, Kyoto University

Satoru Ushijima, Academic Center for Computing and Media Studies (ACCMS), Kyoto University

Daisuke Toriu, Graduate School of Engineering, Kyoto University

Kazuma Aoki, Graduate School of Engineering, Kyoto University

1 緒言

塩淡密度流や温度変化が十分小さい熱対流に対しては、ブシネスク近似¹⁾が有効であり、この近似を使う数値計算が行われている。ブシネスク近似は、流体の密度 ρ に対する密度変化 $\Delta\rho$ が、 $\Delta\rho/\rho \leq 0.1$ 程度の流れで利用できる^{2,3)}とされている。

一方、 $\Delta\rho/\rho$ が大きく、運動方程式の慣性項に対する密度変化が無視できない非ブシネスク流れでは、この近似を用いると正確な解が得られないことが、これまで数多くの数値解析的研究により示されている。本報では、Gröbelbauer ら⁴⁾の lock-exchange 問題の実験を対象とした数値計算を行い、主として高低密度流のフロントの挙動に着目して、ブシネスク近似の考察を行う。

2 数値解析手法

2.1 基礎方程式

本報では、容積一定の容器内で、等温・等圧の密度の異なる2種類の気体を用いる lock-exchange 問題を計算対象とする。この問題では、気体は非圧縮性流体として扱うことができると考えられる。すると、本報で扱うブシネスク近似は「運動方程式における、重力項を除く項

の密度変化を無視する」という近似となる¹⁾。

以下では、ブシネスク近似を用いるモデル (**model-B**) と、ブシネスク近似を用いないモデル (**model-NB**) を設定して比較する。基礎方程式は、以下のようになる。

非圧縮条件 (model-B・NB 共通)

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

運動方程式

• **model-B**

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i \quad (2)$$

• **model-NB**

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i \quad (3)$$

濃度 C の移流拡散方程式 (model-B・NB 共通)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial (C u_j)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x_j^2} \quad (4)$$

ここで、 t は時間、 x_i は直交座標系の座標成分、 u_i は x_i 方向の流速成分である。また、 p 、 τ_{ij} 、 g_i 、 α は、それぞれ圧力、粘性応力テンソル成分、重力加速度成分、

*〒 606-8501 京都市左京区吉田本町

†E-mail: ushijima@media.kyoto-u.ac.jp

拡散係数である。なお、 ρ_0 は基準密度 (定数) であり、濃度 C は、次式の無次元密度に相当する。

$$C = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \quad (5)$$

ここで、 ρ_1 と ρ_2 は lock-exchange 問題で使用される 2 気体の初期密度であり、以下では $\rho_1 > \rho_2$ とする。

2.2 計算手法

上記の基礎方程式を 2 次元コロケート格子上で有限体積法によって離散化し、既報⁵⁾と同様のアルゴリズムを用いて数値解を求める。移流項の計算には、3 次精度 TVD スキーム⁶⁾を用いる。また、圧力解法には、非圧縮条件を精度良く満足させるため、C-HSMAC 法⁷⁾を利用する。計算プログラムは OpenMP で並列化されており、計算には、京都大学学術情報メディアセンターのスーパーコンピュータ Cray XC30 with MIC (システム E) を利用した。

3 数値解析手法の適用

3.1 lock-exchange 問題の概要

lock-exchange 問題では、容器内で中央の仕切り板によって左右に分けられた密度の異なる流体が、仕切り板除去後にどのような流況となるかを調べる。一般には、仕切り板除去後に、低密度の流体が上層を、高密度の流体が下層をそれぞれ逆方向に進行し、その先端はフロントと呼ばれる。

lock-exchange 問題における密度比を $\gamma = \rho_1/\rho_2$ と定義すると、本報では $\rho_1 > \rho_2$ としているので、 $\gamma > 1$ である。Lowe ら⁸⁾は密度の異なる 2 液体を用いた実験を行い、 $1/\gamma$ を広範囲に変化させた流況に対する考察を行った。その結果、 $1/\gamma$ が 1 に近い場合、高低密度流のフロントの進行速度がほぼ一致するが、 $1/\gamma$ が 1 より十分小さいと、高密度流のフロントの進行速度が低密度流のそれより大きくなるということが、確認されている⁸⁾。

3.2 計算条件

本報では、model-B と model-NB の相違を調べるため、Gröbelbauer ら⁴⁾が行った実験を対象とする計算を行った。Gröbelbauer ら⁴⁾の実験では、アルゴン、二酸化炭素、R22 (クロロジフルオロメタン) を使用して、それらの組み合わせにより、密度比 γ が 1.11~21.6 となる実験が行われている⁴⁾。ここでは、表 1 に示す 7 ケースの実験を計算対象とした。

図 1 に計算領域の概略を示す。容器の長さは $L = 6.0$ [m]、 $H = 0.3$ [m] とし、 $g = 9.81$ [m/s²] とした。

なお、初期条件は、流体が静止しているとし、領域左側を高密度気体 ($\rho = \rho_1$)、右側を低密度気体 ($\rho = \rho_2$) とする。境界条件は、流速を non-slip 条件、 C をノイ

表 1 実験条件⁴⁾

気体の組み合わせ	ρ_1 [kg/m ³]	ρ_2 [kg/m ³]	密度比 γ
CO ₂ /Argon	1.791	1.614	1.11
Argon/Air	1.614	1.175	1.38
R22/Argon	3.511	1.614	2.18
R22/Air	3.511	1.175	2.99
Air/Helium	1.175	0.163	7.23
Argon/Helium	1.614	0.163	9.93
R22/Helium	3.511	0.163	21.6

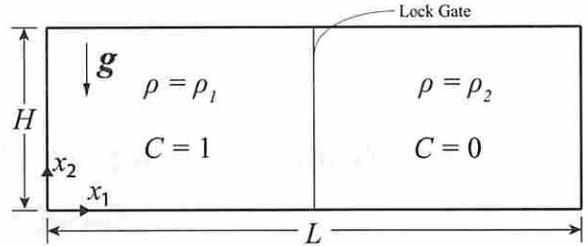


図 1 計算領域

マン条件 ($\partial C/\partial n = 0$) とした。計算セル幅は $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 5.0 \times 10^{-3}$ [m] とし、計算セル数は 1202×62 とした。また、時間増分 Δt は 1.0×10^{-4} [s] とした。

3.3 高低密度流の計算結果

model-B と model-NB の計算結果を、それぞれ図 2 と図 3 に示す。作動気体は R22/Air ($\gamma = 2.99$) である。

Gröbelbauer ら⁴⁾の実験では、 $\gamma = 2.99$ の条件では、高低密度流のフロントの進行速度に相違が生じている。しかしながら、図 2 に示すように、model-B では、高低密度流のフロントの進行速度がほぼ同じ流況となっており、高密度流のフロント速度がより大きくなる状況を再現できていない。これに対して、図 3 に示す model-NB では、高密度流のフロントの進行速度が低密度流のそれより速くなり、Gröbelbauer ら⁴⁾および Lowe ら⁸⁾の実験結果に一致する傾向が得られている。

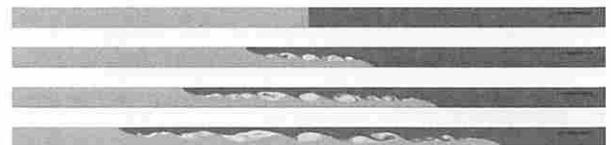


図 2 model-B による R22/Air ($\gamma = 2.99$) の計算結果 (初期条件と時間 1.0 [s] 間隔の計算結果)

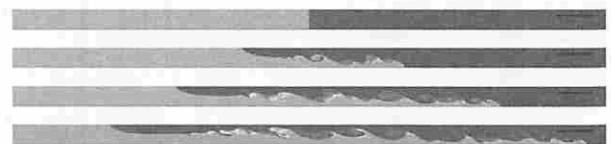


図 3 model-NB による R22/Air ($\gamma = 2.99$) の計算結果 (初期条件と時間 1.0 [s] 間隔の計算結果)

3.4 各時刻のフロントの位置

図4と図5は、領域中央 ($x_1 = 3.0$ [m]) から高密度流のフロントまでの距離 l と時刻 t の関係を示している。

図4に示すように、**model-B** では、高密度流のフロントの挙動のうち、特に γ が大きいケース ($\gamma \geq 2.18$) で、計算結果と実験値の相違が大きくなった。

一方、図5に示すように、**model-NB** では、 $\gamma = 1.11$ のケースで **model-B** と同程度の若干の相違が見られるが、他の γ に対しては、概ね計算結果と実験結果が一致した。なお、結果の図示は省略するが、低密度流のフロント位置に関しては、**model-B** と **model-NB** の間には大きな相違はなかった⁹⁾。

本報の冒頭で述べたように、ブシネスク近似が適用可能な範囲を $\gamma \leq 1.1$ とすると、この条件に比較的近い $\gamma = 1.11$ のケースでは、**model-B** および **model-NB** の計算結果に相違がないことが確認できる。一方、 $\gamma \geq 1.38$ のケースでは、運動方程式の慣性項に対する密度変化の影響が無視できなくなるため、**model-B** と **model-NB** の計算結果に相違が生じたと考えられる。

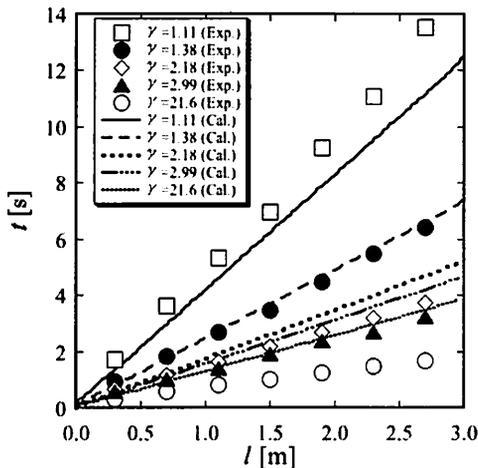


図4 高密度流のフロント位置⁴⁾ (**model-B**)

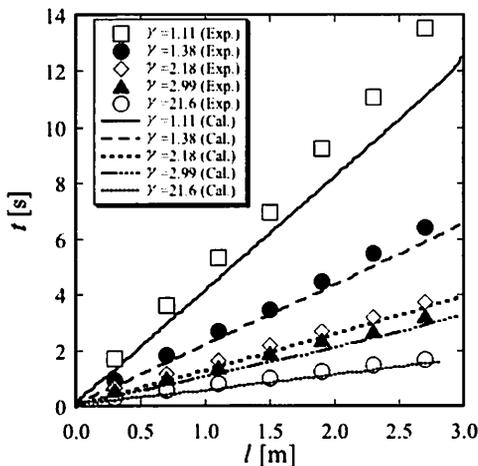


図5 高密度流のフロント位置⁴⁾ (**model-NB**)

3.5 無次元密度 ρ^* とフルード数 Fr の関係

Gröbelbauer ら⁴⁾と同様に、無次元密度 ρ^* とフルード数 Fr を以下のように定義する。

$$\rho^* = \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}} \quad (6)$$

$$Fr = \frac{u_F}{\sqrt{gh}} \quad (7)$$

ここで、 u_F は高低密度流のフロントの進行速度、 $h = H/2$ である。 u_F は領域中央からフロントまでの距離 l と時刻 t の関係を線形近似することによって得られる。また、Gröbelbauer ら⁴⁾は次の理論値を導出している。

$$Fr_H = \sqrt{\frac{\rho^{*2}}{1 - \rho^{*2}}} \quad (8)$$

$$Fr_L = \sqrt{\frac{\rho^{*2}}{1 + \rho^{*2}}} \quad (9)$$

図6と図7に、上記の無次元密度 ρ^* とフルード数 Fr の関係を示す。なお、図中の Theory(a) と Theory(b) は、それぞれ式(8)と式(9)を表している。

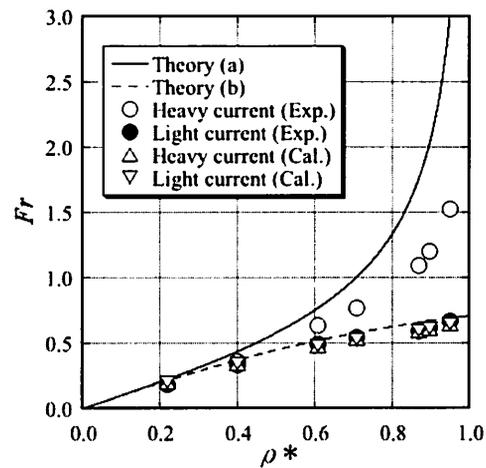


図6 無次元密度とフルード数の関係⁴⁾ (**model-B**)

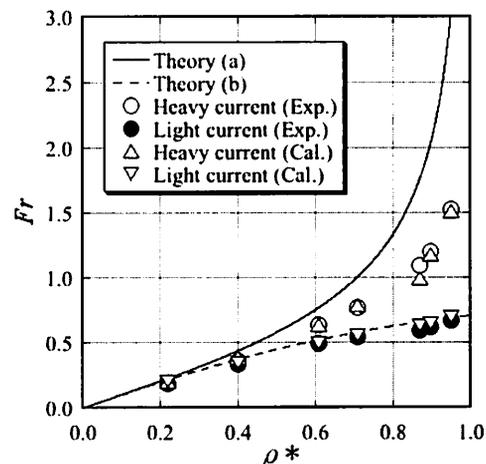


図7 無次元密度とフルード数の関係⁴⁾ (**model-NB**)

図6に示すように、**model-B**では γ が1に近いケース($\gamma = 1.11, 1.38$)では、計算で得られたフルード数 Fr は実験値と良く一致したが、 γ が1より十分大きいケース($\gamma \geq 2.18$)では、高密度流のフロントのフルード数 Fr が実験値と一致していない。一方、**model-NB**では図7に示すように、高密度流、低密度流ともに、計算で得られたフルード数 Fr は実験値と良く一致した。

4 圧力ポアソン方程式の離散化式の比較

ブシネスク近似の有無により、圧力ポアソン方程式がどのように異なるかについて、若干の考察を行う。本報で用いたMAC系の解法では、圧力計算時に、圧力の時間変化量 $\phi = p^{n+1} - p^n$ に対するポアソン方程式を計算する。このポアソン方程式は、セル中心の番号が (i, j) である変数を下添え字 i, j を付けて表すと、2次精度の離散化により、次のような離散化式となる。

• model-B

$$\begin{aligned} \phi_{i,j} + c_1(\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j}) + c_2(\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1}) \\ = c_3 \nabla u_{i,j} \quad (10) \end{aligned}$$

係数 c_1 から c_3 は、密度 ρ を含まない定数である。

• model-NB

$$\begin{aligned} \phi_{i,j} + d_1\phi_{i-1,j} + d_2\phi_{i+1,j} + d_3\phi_{i,j-1} + d_4\phi_{i,j+1} \\ = d_0 \nabla u_{i,j} \quad (11) \end{aligned}$$

一方、式(11)中の係数 d_0 から d_4 には、密度 ρ が含まれており、係数値は時間的・空間的に変化する。

式(10)と式(11)は、一般に連立一次方程式 $A\phi = b$ と表される。ここで、 ϕ は2次元分布する $\phi_{i,j}$ を行順あるいは列順に規則的に並べたベクトルとする。このとき、**model-B**では、係数行列 A は実対称行列となる。このため、 A は適当な直交行列 P により対角化することが可能で、方程式 $A\phi = b$ は、次のように表される。

$$\phi = P^T D^{-1} P b \quad (12)$$

ここで、 D は、 A の固有値 λ_i を対角要素とする対角行列である。このように、ブシネスク近似を用いる場合には、圧力ポアソン方程式の解 ϕ は、右辺ベクトル b に直交行列と対角行列を作用させたベクトルとなる。このため、運動方程式の移流・拡散項にも依存するが、圧力はある程度の規則性を保持する分布になると推察される。一方、**model-NB**では、式(11)において一般に $d_1 \neq d_2$ および $d_3 \neq d_4$ であるので、 A は非対称行列となり、密度比 γ の増加とともに非対称性が強くなる。このことが、lock-exchange問題における高低密度流のフロントの進行の相違をもたらした一因と考えられる。

5 結言

本報では、ブシネスク近似の有無に基づく2つの基礎方程式系を設定し、それらの計算結果をGröbelbauerら⁴⁾のlock-exchange問題の実験結果と比較した。

ブシネスク近似を用いる**model-B**では、密度比 γ が1に近い条件($\gamma \leq 1.38$)では**model-NB**と同様の結果が得られたが、密度比 γ が1より十分大きい場合($\gamma \geq 2.18$)にはフロントの挙動を適切に再現できなかった。一方、ブシネスク近似を用いない**model-NB**では、広範囲の密度比において、lock-exchange問題のフロントの挙動を正確に再現することができ、フロントのフルード数はGröbelbauerら⁴⁾の実験値と良く一致した。ブシネスク近似の有無や密度比により、数値計算における離散化された圧力ポアソン式の係数行列の性質が異なることが、上記の結果の一因となっていると推察される。

引用文献

- 1) J. S. Turner: *Buoyancy Effects in Fluids*, (Cambridge University Press, 1973) 9–11
- 2) Donald D. Gray and Aldo Giorgini: The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.19, Issue5 (1976) 545–551.
- 3) J. O. Shin, S. B. Dalziel and P. F. Linden: Gravity currents produced by lock exchange, *J. Fluid Mech*, Vol.521 (2004) 1–34
- 4) H. P. Gröbelbauer, T. K. Fannelop and R. E. Britter: the propagation of intrusion fronts of high density ratios, *Cambridge University Press*, Vol.250 (1993) 669–687.
- 5) 牛島省, 竹村雅樹, 禰津家久: コロケート格子配置を用いたMAC系解法の計算スキームに関する考察, *土木学会論文集*, No.719/II-61, (2002) 11–19.
- 6) S. Yamamoto and H. Daiguji: Higher-Order-Accurate Upwind Schemes for Solving the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations, *Computers Fluids*, Vol.22 (1993) 259–270.
- 7) 牛島省, 禰津家久: 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法, *土木学会論文集*, Vol.698 (2002) 11–19.
- 8) Ryan J. Lowe, James W. Rottman and P. F. Linden: The non-Boussinesq lock-exchange problem. Part I. Theory and experiments, *Cambridge University Press*, Vol.537 (2005) 101–124.
- 9) 池田俊一, 牛島省, 鳥生大祐, 青木一真: 密度流の数値計算におけるブシネスク近似の考察, 第28回数値流体力学シンポジウム, A02-2(2014)